

中国科学院大学

2020 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称：概率论与数理统计

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上均无效。

本试卷可能用到的常数：分别以 $Z(\alpha)$ ， $\chi^2_\alpha(n)$ 表示标准正态分布、卡方分布的上 α 分位数， $Z(0.005) = 2.57$ ， $Z(0.01) = 2.33$ ， $Z(0.025) = 1.96$ ， $Z(0.05) = 1.65$ ， $\chi^2_{0.05}(7) = 14.067$ ， $\chi^2_{0.05}(8) = 15.507$ ， $\chi^2_{0.01}(8) = 16.919$ 。

1. (20 分) 设有 n 个事件 A_1, \dots, A_n ，其概率分别为 p_1, \dots, p_n ，设 $0 < p_i < 1$ ， $i = 1, \dots, n$ 。

(1) 试用数学归纳法证明：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i;$$

- (2) 设 n 个事件 A_1, \dots, A_n 独立，记 $p = p_1 + \dots + p_n$ 。证明：事件“ A_1, \dots, A_n 都不发生”的概率小于 e^{-p} 。

2. (10 分) 一个均匀骰子有两面涂成白色，有四面涂成黑色。抛掷这个骰子直至首次出现白色为止。试问：游戏至少持续四次或更多次数的概率是多少？

3. (15分) 小王外出可以乘坐飞机、高铁、轮船、汽车四种交通工具, 其概率分别为5%、15%、30%、50%, 乘坐几种交通工具如期到达的概率依次为90%、90%、70%、60%。

(1) 求小王如期到达的概率;

(2) 已知小王误期到达, 求他乘坐高铁的概率。

4. (10分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2}, & 0 < x < \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 定义随机变量

$Y = \sin X$ 。求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 。

5. (15分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立且均服从指数分布, 其密度函数为

$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。 $X+Y$ 和 $\frac{X}{Y}$ 是否独立? 说明理由或给出证明。

6. (15分) 设随机向量 (X, Y) 有概率密度函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{c}{1+x^2+y^2}, & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

(1) 求常数 c 以及 X 的边缘概率密度;

(2) 求给定 $X = \frac{1}{2}$ 时, Y 的条件概率密度。

7. (10分) 设二维随机向量 (X, Y) 服从均值为 $(0, 0)$, 协方差阵为 $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ 的二维

正态分布。求 $E[\max\{X, Y\}]$ 。

8. (15分) 计算器在进行加法时, 将每个加数舍入最靠近它的整数后再进行加法, 假设所有舍入误差独立且服从 $(-0.5, 0.5)$ 上均匀分布(可以认为误差足够多)。试问: 最多可以有多少个数相加, 能使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.9?

9. (20分) 设总体 X 服从均匀分布 $U(\theta, 2\theta)$, $\theta > 0$, θ 未知, X_1, \dots, X_n 为取自总体 X 的独立同分布样本。

(1) 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$ 和极大似然估计 $\hat{\theta}_2$;

(2) 判断 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是否为无偏估计量。

10. (10分) 若两种固体燃料的燃烧率均服从正态分布, 均值分别为 μ_1, μ_2 , 并且已知燃烧率的标准差均近似地为 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.05 \text{ cm/s}$, 取样本容量为 $n_1 = n_2 = 20$, 得两种燃烧率的样本均值分别为 $\bar{x}_1 = 18 \text{ cm/s}$, $\bar{x}_2 = 24 \text{ cm/s}$ 。设所有样本独立, 求两燃烧率总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 0.99 的置信区间。

11. (10分) 要求某种导线电阻的标准差不得超过 0.005Ω , 今在生产的一批导线中取样品 9 根, 测得其标准差 $s = 0.007 \Omega$ 。设总体为正态分布, 参数均未知。问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 能否认为这批导线的标准差显著地偏大?