中国科学院大学

2020年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称：量子力学

考生须知：

1．本试卷满分为150分，全部考试时间总计180分钟。
2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、（共30分）考虑一维束缚态。

(1)证明$\langle\psi(x,t)|\psi(x,t)\rangle$不随时间变化，此处波函数$\psi$不必是定态。

(2)证明对于定态，动量的期望值为零。
(3)证明如果粒子在$t=0$时刻处于定态，则在以后时刻永远保持定态。

二、（共30分）设波函数$\psi\left(x\right)=\left(1/\sqrt{2\pi}\right)e^{ip(x+\beta)\hbar}$，而$\hat{x}$，$\hat{p}$分别为$x$方向的坐标和动量算符，其中$\beta$为实常数。

(1)说明$\psi\left(x\right)$是否为$\hat{p}$的归一化本征态。

(2)证明$\langle x'|e^{i\alpha\hat{p}/\hbar}=\langle x'+\alpha|$，及$e^{i\alpha\hat{p}/\hbar}|x'\rangle=|x'-\alpha\rangle$，其中$\alpha$为实常数。

(3)化简算符$e^{i\alpha\hat{p}/\hbar}\hat{x}e^{-i\alpha\hat{p}/\hbar}$。

(4)化简算符$e^{i\alpha\hat{p}/\hbar}\hat{x}^2e^{-i\alpha\hat{p}/\hbar}$。

三、（共30分）一个无自旋粒子的波函数为$\psi=K(x+iy+2z)e^{-\alpha r}$，此处$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,其中$K$,$\alpha$为实常数。（球谐函数：$Y_0^0=\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$，$Y_1^0=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$，$Y_1^{\pm1}=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}$。）

(1)求粒子的总角动量。

(2)求角动量z分量即$\hat{L}_z$的期望值，及测得$L_z=\hbar$的概率。

(3)求发现粒子在(θ,φ)方向上$d\Omega$立体角内的概率。

四、（共 30 分）

(1)一个电子在t=0 的时刻处于自旋态$\chi=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-2i\\2\end{pmatrix}$。在$t>0$时刻，在外界加一个磁场$\vec{B}=B_0(\sin\theta\hat{e}_x+\cos\theta\hat{e}_z)$，此时电子的哈密顿量为$\hat{H}=-2\mu_B\hat{\vec{S}}\bullet\vec{B}$，其中$\hat{\vec{S}}$为自旋算符，$\mu_B$为玻尔磁子，求此粒子在任意$t$时刻的波函数。

(2)考虑两个自旋为$\frac{1}{2}$的粒子处于磁场中，此时系统的哈密顿量为

$$\hat{H}=a\hat{\sigma}_{1z}+b\hat{\sigma}_{2z}+c_0\hat{\vec{\sigma}}_1\bullet\hat{\vec{\sigma}}_2,$$

其中a，b，c_0为常数，$\hat{\vec{\sigma}}$是泡利算符，前两项为粒子处于磁场中的势能，最后一项为两粒子自旋-自旋相互作用能。求系统的能级。

五、（共 30 分）考虑谐振子问题。

(1)一维谐振子的哈密顿量为$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}k\hat{x}^2$，证明由不确定性关系得到的能量最小值与该谐振子的基态能量一致。

(2)若(1)中的基态波函数是高斯型$e^{-\beta x^2}$，用变分法求β。

(3)利用升、降算符写出(1)中的第一激发态的波函数（不必归一）。

(4)对于三维各向同性谐振子，第一激发态是三重简并的。现有一微扰$\hat{H}'=b\hat{x}\hat{y}=\frac{\hbar b}{2m\omega}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，写出该微扰引起的第一激发态的能级分裂。