

中国科学院大学

2020 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称：高等代数

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上均无效。

说明：本卷共九题，前七道题必答，第八题、第九题只准选其一答之。

一. (20 分) 若整系数多项式 $f(x)$ 有根 p/q ，这里 p, q 是互素的整数，证明

- 1) $(q-p) \mid f(1)$, $(q+p) \mid f(-1)$;
- 2) 对任意整数 m 有 $(mq-p) \mid f(m)$ 。

二. (18 分) 以 $\det(M)$ 记矩阵 M 的行列式，证明下列结论：

- 1) 设 A, B 都是 n 阶实方阵，则

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A + \sqrt{-1}B) \cdot \det(A - \sqrt{-1}B)$$

- 2) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵， B 是 $n \times m$ 矩阵， I_k 表示 k 阶单位矩阵。则

$$\lambda^n \cdot \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \cdot \det(\lambda I_n - BA), \quad (\lambda \text{ 是复数}).$$

三. (18 分) 已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = I_n$ ，问：秩 $(I_n + A) +$ 秩 $(I_n - A) = ?$ 并证明你的答案。

四. (18 分) 设 A 是 n 阶实对称正定矩阵， B 是 n 阶实对称半正定矩阵，

- 1) 证明： $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$;
- 2) 当 $n \geq 2$ 时，问：在什么条件下有 $\det(A+B) > \det(A) + \det(B)$ ，并证明之。

五. (18 分) 设 n 阶复方阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。求 A 的伴随矩阵 A^* 的全部特征值。

六. (20分) 已知实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

1) 求正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角形矩阵;

2) 求解矩阵方程 $X^2 = A$ 。

七. (18分) 设 λ 是非零复数, k 为正整数, $J_n(\lambda)$ 表示特征值为 λ 的 n 阶若当块。

1) 求 $(J_n(\lambda))^k$ 的若当标准形;

2) 证明: $J_n(\lambda)$ 有 k 次方根, 即存在 n 阶复方阵 B 使得 $B^k = J_n(\lambda)$;

3) 证明: 任意 n 阶可逆复方阵 A 都有 k 次方根。

八. (20分) n 阶实方阵 P 称为正交矩阵, 如果 $PP^t = I_n$; n 阶实方阵 R 称为反射矩阵, 如果 R 正交相似于对角矩阵 $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ 。证明: 每个二阶正交矩阵都能写成反射矩阵的乘积。

九. (20分) $\mathbb{R}[x]_n$ 表示实数域 \mathbb{R} 上所有次数小于 $n (> 1)$ 的多项式之集, 它是实数域上 n 维线性空间。求导算子 D :

$$Df(x) = f'(x), \quad \forall f(x) \in \mathbb{R}[x]_n$$

是 $\mathbb{R}[x]_n$ 上的线性变换。

1) 对于任意实数 a , 证明平移算子 S_a :

$$S_a f(x) = f(x+a), \quad \forall f(x) \in \mathbb{R}[x]_n$$

是 $\mathbb{R}[x]_n$ 上的线性变换, 并且存在一个多项式 $g(x) \in \mathbb{R}[x]_n$, 使得 $S_a = g(D)$ 。

2) 分别求出 S_a, D 在基 $1, x, x^2/2!, \dots, x^{n-1}/(n-1)!$ 下的矩阵。